



· 粒计算与概念知识获取 ·

决策形式背景基于 OE-协调性的属性约简

常丽娜^{1,2}, 魏玲^{2,3}, 彭超林⁴

(1. 长治学院 数学系, 山西 长治 046011; 2. 西北大学 概念、认知与智能研究中心, 陕西 西安 710127;
3. 西北大学 数学学院, 陕西 西安 710127; 4. 格拉斯哥大学 亚当斯密商学院, 苏格兰 格拉斯哥 G128QQ)

摘要 属性约简作为形式概念分析中非常重要的一个研究分支, 在三支概念分析中也同样重要。基于对象导出三支概念格, 提出了保持决策形式背景 OE-协调性的属性约简理论, 丰富了三支概念分析的约简理论。首先, 定义了决策形式背景的 OE-协调集和 OE-约简, 并将属性按其特征分为 3 类。其次, 指出 OE-约简的本质就是极小 OE-协调集, 给出了 OE-协调集的几个判定定理, 通过研究 OE-协调集的充要条件, 获取 OE-约简的判定定理。最后, 给出 OE-差别矩阵和 OE-差别函数的定义, 并给出了利用 OE-差别矩阵和 OE-差别函数计算 OE-约简的方法。

关键词 三支概念分析; 属性约简; OE-协调性; 决策形式背景; 对象导出三支概念格
中图分类号: O29; TP18 **DOI**: 10.16152/j.cnki.xdxbzr.2024-02-005

Attribute reduction in formal decision contexts based on OE-consistency

CHANG Lina^{1,2}, WEI Ling^{2,3}, PENG Chaolin⁴

(1. Department of Mathematics, Changzhi University, Changzhi 046011, China;
2. Institute of Concepts, Cognition and Intelligence, Northwest University, Xi'an 710127, China;
3. School of Mathematics, Northwest University, Xi'an 710127, China;
4. Adam Smith Business School, University of Glasgow, Glasgow G128QQ, Scotland)

Abstract Attribute reduction, as a very important branch of formal concept analysis, is equally important in the three-way concept analysis. Based on object-induced concept lattices, attribute reduction theory which preserve OE-consistency of formal decision contexts is proposed, which enriches the reduction theory of three-way concept analysis. Firstly, OE-consistent set and OE-reduct of formal decision contexts are defined, and the attributes are classified into three categories according to their characteristics. Then, it is pointed out the essence of OE-reduct is minimal OE-consistent set, and several judgement theorems of OE-consistent set are given. By studying the necessary and sufficient conditions of OE-consistent set, judgement theorem of OE-reduct is obtained. Finally, the definition of OE-discernibility matrix and OE-discernibility function are given, and the method of calculating OE-reduct by using OE-discernibility matrix and OE-discernibility function is given.

Keywords three-way concept analysis; attribute reduction; OE-consistency; formal decision contexts; ob-

收稿日期: 2023-08-30

基金项目: 国家自然科学基金(12171392); 长治学院科研项目(XJZZ2021013)。

第一作者: 常丽娜, 女, 副教授, 从事形式概念分析、三支决策、博弈论等研究, bingdianlina@163.com。

通信作者: 魏玲, 女, 教授, 博士生导师, 从事形式概念分析、三支决策、粒计算等研究, wl@nwu.edu.cn。

ject-induced three-way concept lattices

形式概念分析^[1-2] (formal concept analysis, FCA)作为数据分析与知识发现的有力工具,是由德国数学家 Wille 于 1982 年提出的,并被广泛应用于机器学习、冲突分析等很多领域^[3]。

在经典形式概念分析的基础上, Qi 等结合三支决策理论^[4] (three-way decision, 3WD)于 2014 年提出了三支概念分析^[5-6] (three-way concept analysis, 3WCA),既体现了三支决策的思想和应用价值,也是经典形式概念分析的一种扩展,能同时反映“共同具有”和“共同不具有”两种信息。目前,三支概念分析已经得到了很多学者的关注和认可,研究成果也越来越丰富。Ren 等研究了两类三支概念格的 4 种属性约简问题,并讨论了它们之间的关系^[7]。Yu 等通过考虑三支概念格(三支粗概念格)的原子、不可约元和补的性质,研究了三支概念格(三支粗概念格)的性质,在具有这些特殊性质的完备格与三支概念格(三支粗概念格)之间建立了一个同构映射^[8]。Zhi 等提出了三支对偶概念格,探讨了三支对偶概念格与经典对偶概念格的关系,研究了三支概念格、三支对偶概念格、三支面向对象概念格和三支面向对象属性概念格 4 种类型的三支概念分析模型之间的关系^[9]。Yang 等引入一对组合算子,提出了一种构造属性诱导三支概念格和对象诱导三支概念格的新方法^[10]。Zhao 等对三支算子的性质重新表述,研究了不同类型的三支概念格之间的关系^[11]。

决策形式背景^[12]这一概念是由魏玲提出的,随之决策形式背景的知识发现成为 FCA 的研究热点。决策形式背景只有在满足一定的协调意义下,对其的知识发现才更具合理性。Wei 等定义了决策形式背景的强、弱协调性,并在此基础上研究了两种协调意义下的属性约简^[13]。Li 等对决策形式背景的属性约简与规则获取进行了较为系统深入的研究^[14-15]。Chen 等研究了大规模决策形式背景的属性约简问题,提出了一种计算决策形式背景差别矩阵简单有效的方法^[16]。作为形式概念分析的扩展,决策形式背景的知识发现在三支概念分析中同样重要。陈雪等基于 AE-概念格,研究了决策形式背景的保持非冗余规则信息不变的属性约简问题^[17]。林洪等研究了三支粒协调决策形式背景的粒约简问题^[18]。刘琳等

基于 AE-概念格研究了决策背景的规则提取问题^[19-20]。Wei 等基于两类三支概念格定义了决策形式背景的 OE-协调性和 AE-协调性,研究了三支规则提取问题^[21]。Long 等基于三支概念格研究了不完备决策背景的规则获取问题^[22]。

决策形式背景在满足一定的协调意义下,其知识发现才更具合理性和可解释性,因此,研究决策形式背景不同的协调性,可以挖掘出一个决策背景更多的信息与细节。本文根据文献[20]提出的决策形式背景的 OE-协调性的定义,基于对象导出三支概念格,研究决策形式背景保持 OE-协调性的属性约简理论,并通过实例表明协调集判定定理及约简计算方法的有效性。

1 预备知识

1.1 形式概念分析

定义 1^[2] 称 (G, M, I) 为一个形式背景,其中 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_p\}$ 是对象集, $g_i (i \leq p)$ 称为一个对象; $M = \{m_1, m_2, \dots, m_q\}$ 是属性集, $m_j (j \leq q)$ 称为一个属性; I 为 G 和 M 之间的二元关系, $I \subseteq G \times M$ 。若 $(g, m) \in I$, 则表示对象 g 具有属性 m , 也记为 gIm 。

对于形式背景 (G, M, I) , 在任意对象集 $X \subseteq G$ 和属性集 $A \subseteq M$ 上定义一对正算子 $*$: $\mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}(M)$ 与 $*$: $\mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(G)$ 为

$$X^* = \{m \in M \mid \forall g \in X, gIm\},$$

$$A^* = \{g \in G \mid \forall m \in A, gIm\}.$$

对任意的 $g \in G, m \in M$, 如果满足 $\{g\}^* \neq \emptyset, \{g\}^* \neq M, \{m\}^* \neq \emptyset, \{m\}^* \neq G$, 则称该形式背景是正则的。本文研究的形式背景(约简前)都是正则的,且是有限的。

定义 2^[2] 设 (G, M, I) 为一个形式背景, $X \subseteq G, A \subseteq M$, 若 $X^* = A, A^* = X$, 则称 (X, A) 为形式概念, 简称为概念。其中, X 称为概念 (X, A) 的外延, A 称为概念 (X, A) 的内涵。

将形式背景 (G, M, I) 的概念的全体记为 $L(G, M, I)$, 对于任意的 $(X_1, A_1), (X_2, A_2) \in L(G, M, I)$, 它们的偏序关系为

$$(X_1, A_1) \leq (X_2, A_2) \Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 (\Leftrightarrow A_1 \supseteq A_2).$$

进一步, 定义任意两个概念的下确界和上确界为

$$\begin{aligned}(X_1, A_1) \wedge (X_2, A_2) &= (X_1 \cap X_2, (A_1 \cup A_2)^{**}), \\ (X_1, A_1) \vee (X_2, A_2) &= ((X_1 \cup X_2)^{**}, A_1 \cap A_2).\end{aligned}$$

则 $L(G, M, I)$ 形成一个完备格, 称为概念格。

1.2 三支概念分析

令 S 是非空有限集合, $\mathcal{A}(S)$ 是 S 的幂集, $\mathcal{DA}(S) = \mathcal{A}(S) \times \mathcal{A}(S)$, 对于任意的 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2) \in \mathcal{DA}(S)$, 定义它们的交运算、并运算、补运算及其包含关系、相等关系如下:

$$\begin{aligned}(X_1, Y_1) \cap (X_2, Y_2) &= (X_1 \cap X_2, Y_1 \cap Y_2), \\ (X_1, Y_1) \cup (X_2, Y_2) &= (X_1 \cup X_2, Y_1 \cup Y_2), \\ (X_1, Y_1)^c &= (X_1^c, Y_1^c) = (S - X_1, S - Y_1), \\ (X_1, Y_1) \subseteq (X_2, Y_2) &\Leftrightarrow X_1 \subseteq X_2 \text{ 且 } Y_1 \subseteq Y_2, \\ (X_1, Y_1) = (X_2, Y_2) &\Leftrightarrow X_1 = X_2 \text{ 且 } Y_1 = Y_2.\end{aligned}$$

与 1.1 中给出的正算子类似, 在形式背景 (G, M, I) 上定义一对负算子 $\bar{*}: \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}(M)$ 与 $*: \mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(G)$, 对任意的 $X \subseteq G, A \subseteq M, I^c = (G \times M) \setminus I$,

$$\begin{aligned}X^{\bar{*}} &= \{m \in M \mid \forall g \in X, gI^c m\}, \\ A^{\bar{*}} &= \{g \in G \mid \forall m \in A, gI^c m\}.\end{aligned}$$

下面给出三支算子的概念。

定义 3^[5] 设 (G, M, I) 为一个形式背景, 定义一对对象导出三支算子 $\triangleleft: \mathcal{A}(G) \rightarrow \mathcal{A}(M) \times \mathcal{A}(M)$ 与 $\triangleright: \mathcal{A}(M) \times \mathcal{A}(M) \rightarrow \mathcal{A}(G)$, 对任意的 $X \subseteq G$ 和 $A, B \subseteq M$,

$$X^{\triangleleft} = (X^*, X^{\bar{*}}), (A, B)^{\triangleright} = A^* \cap B^{\bar{*}}.$$

对任意的 $X \subseteq G$ 和 $A, B \subseteq M$, 对象导出三支算子 $\triangleleft$ 和 $\triangleright$ 有以下性质:

- 1) $X \subseteq X^{\triangleleft\triangleright}, (A, B) \subseteq (A, B)^{\triangleright\triangleleft}$;
- 2) $X \subseteq Y \Rightarrow X^{\triangleleft} \supseteq Y^{\triangleleft}, (A, B) \subseteq (C, D) \Rightarrow (A, B)^{\triangleright} \supseteq (C, D)^{\triangleright}$;
- 3) $X = X^{\triangleleft\triangleright\triangleleft}, (A, B) = (A, B)^{\triangleright\triangleleft\triangleright}$;
- 4) $X \subseteq (A, B)^{\triangleright} \Leftrightarrow (A, B) \subseteq X^{\triangleleft}$;
- 5) $(X \cup Y)^{\triangleleft} = X^{\triangleleft} \cap Y^{\triangleleft}, (X \cap Y)^{\triangleleft} \supseteq X^{\triangleleft} \cup Y^{\triangleleft}$;
- 6) $((A, B) \cup (C, D))^{\triangleright} = (A, B)^{\triangleright} \cap (C, D)^{\triangleright}, ((A, B) \cap (C, D))^{\triangleright} \supseteq (A, B)^{\triangleright} \cup (C, D)^{\triangleright}$.

设 $X \subseteq G, (A, B) \in \mathcal{DA}(M)$, 如果 $X^{\triangleleft} = (A, B)$ 且 $(A, B)^{\triangleright} = X$, 则称 $(X, (A, B))$ 是 (G, M, I) 的一个对象导出三支概念, 简称为 OE-概念。其中 X 是 OE-概念 $(X, (A, B))$ 的外延, (A, B) 是 OE-概念 $(X, (A, B))$ 的内涵。

记形式背景 (G, M, I) 的所有 OE-概念构成的集合为 $OEL(G, M, I)$, 所有 OE-概念外延构成的集合为 $OEL_E(G, M, I)$ 。对于任意的 $(X_1, (A_1, B_1)), (X_2, (A_2, B_2)) \in OEL(G, M, I)$, 定义它们的偏序关系为

$$\begin{aligned}(X_1, (A_1, B_1)) \leq (X_2, (A_2, B_2)) &\Leftrightarrow \\ X_1 \subseteq X_2 &(\Leftrightarrow (A_1, B_1) \supseteq (A_2, B_2)).\end{aligned}$$

如果 $(X_1, (A_1, B_1)) \leq (X_2, (A_2, B_2))$ 且 $(X_1, (A_1, B_1)) \neq (X_2, (A_2, B_2))$, 则记为 $(X_1, (A_1, B_1)) < (X_2, (A_2, B_2))$ 。如果 $(X_1, (A_1, B_1)) < (X_2, (A_2, B_2))$, 且不存在 OE-概念 $(X, (A, B))$ 使得 $(X_1, (A_1, B_1)) < (X, (A, B)) < (X_2, (A_2, B_2))$ 成立, 则称 $(X_1, (A_1, B_1))$ 是 $(X_2, (A_2, B_2))$ 的子概念, $(X_2, (A_2, B_2))$ 是 $(X_1, (A_1, B_1))$ 的父概念, 记作 $(X_1, (A_1, B_1)) < (X_2, (A_2, B_2))$ 。其中, 任意两个 OE-概念的下确界和上确界为

$$\begin{aligned}(X_1, (A_1, B_1)) \wedge (X_2, (A_2, B_2)) &= \\ (X_1 \cap X_2, ((A_1, B_1) \cup (A_2, B_2))^{\triangleright\triangleleft}), \\ (X_1, (A_1, B_1)) \vee (X_2, (A_2, B_2)) &= \\ ((X_1 \cup X_2)^{\triangleleft}, ((A_1, B_1) \cap (A_2, B_2))).\end{aligned}$$

则 $OEL(G, M, I)$ 是一个完备格, 称为对象导出三支概念格, 简记为 OE-概念格。

对于形式背景 (G, M, I) , 设 $D \subseteq M$, 记 $I_D = I \cap (G \times D)$, 那么 (G, D, I_D) 也是一个形式背景, 称 (G, D, I_D) 为 (G, M, I) 的形式子背景, 简称为子背景。对于运算 $*, \bar{*}, \triangleleft, \triangleright$ 在形式背景 (G, M, I) 下仍用 $*, \bar{*}, \triangleleft, \triangleright$ 表示, 在其子背景 (G, D, I_D) 下用 $*_D, \bar{*}_D, \triangleleft_D, \triangleright_D$ 表示。显然对于 $X \subseteq G$, 有 $I_M = I, X^{*M} = X^*, X^{*D} = X^* \cap D \subseteq X^*, X^{\triangleleft M} = X^{\triangleleft}, X^{\triangleleft D} = X^{\triangleleft} \cap (D, D) \subseteq X^{\triangleleft}$ 。对于 $H, K \subseteq D$, 有 $H^{*\triangleright D} = H^*, H^{\bar{*}\triangleright D} = H^{\bar{*}}, (H, K)^{\triangleright D} = (H, K)^{\triangleright}$, 也将 $H^{*\triangleright D}, H^{\bar{*}\triangleright D}, (H, K)^{\triangleright D}$ 简记为 $H^*, H^{\bar{*}}, (H, K)^{\triangleright}$ 。

2 决策形式背景的属性约简

2.1 OE-协调性与属性约简的相关定义

本节首先介绍决策形式背景 OE-协调性的定义, 然后给出保持决策形式背景 OE-协调性的协调集和约简的定义。

定义 4^[20] 如果 (G, M, I) 和 (G, N, J) 是形式背景, $M \cap N = \emptyset$, 则称五元组 (G, M, I, N, J) 为一个决策形式背景, 其中 M 称为条件属性集,

N 称为决策属性集。背景 (G, M, I) 的对象导出三支概念格记为 $OEL(G, M, I)$, 背景 (G, N, J) 的对象导出三支概念格记为 $OEL(G, N, J)$ 。如果对于任意 $(Y, (E, F)) \in OEL(G, N, J)$, 总存在 $(X, (A, B)) \in OEL(G, M, I)$, 使得 $X = Y$, 则称 $OEL(G, M, I)$ 细于 $OEL(G, N, J)$, 记作 $OEL(G, M, I) \leq OEL(G, N, J)$, 且称决策形式背景 (G, M, I, N, J) 是对象导出三支协调的, 简称为 OE-协调的。

性质 1 若决策形式背景 (G, M, I, N, J) 是 OE-协调的, 则 $OEL_E(G, N, J) \subseteq OEL_E(G, M, I)$ 。

定义 5 对于 OE-协调的决策形式背景 (G, M, I, N, J) , 如果存在 $D \subseteq M$, 使得决策形式背景 (G, D, I_D, N, J) 也是 OE-协调的, 则称 D 是 (G, M, I, N, J) 的 OE-协调集。进一步, 如果 $\forall d \in D$, 决策形式背景 $(G, D - \{d\}, I_{D - \{d\}}, N, J)$ 不是 OE-协调的, 则称 D 是 (G, M, I, N, J) 的 OE-约简。所有 (G, M, I, N, J) 的 OE-约简的交集称为 (G, M, I, N, J) 的 OE-核心。

定义 6 设 OE-协调的决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的所有 OE-约简为 $\{D_i \mid D_i \text{ 是约简}, i \in \tau\}$ (τ 为一个指标集), 则条件属性集 M 中的属性可分为以下 3 类:

- 1) OE-绝对必要属性(核心属性) $b: b \in \bigcap_{i \in \tau} D_i$;
- 2) OE-相对必要属性 $c: c \in \bigcup_{i \in \tau} D_i - \bigcap_{i \in \tau} D_i$;
- 3) OE-绝对不必要属性 $d: d \in M - \bigcup_{i \in \tau} D_i$ 。

其中, 非 OE-核心中的属性, 称为 OE-不必要属性 $e: e \in M - \bigcap_{i \in \tau} D_i$ 。

定理 1 设决策形式背景 (G, M, I, N, J) 是 OE-协调的, 则其 OE-约简一定存在。

证明 因为 (G, M, I, N, J) 是 OE-协调的, 故 M 是 OE-协调集, 若 $\forall m \in M$, 都有 $(G, M - \{m\}, I_{M - \{m\}}, N, J)$ 不是 OE-协调的, 则 M 就是 OE-约简。若 $\exists m \in M$, 使得 $(G, M - \{m\}, I_{M - \{m\}}, N, J)$ 是 OE-协调的, 令 $M_1 = M - \{m\}$, 则 M_1 是 OE-协调集, 若 $\forall m_1 \in M_1$, 都有 $(G, M_1 - \{m_1\}, I_{M_1 - \{m_1\}}, N, J)$ 不是 OE-协调的, 则 M_1 是 OE-约简; 否则, 再进一步研究 $M_1 - \{m_1\}$ 。重复上述过程, 由于 M 是有限集, 所以至少可以找到决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的一个 OE-约简, 故 OE-约简必存在。

例 1 表 1 给出了一个决策形式背景 (G, M, I, N, J) 。其中对象集 $G = \{1, 2, 3, 4\}$, 条件属性集为 $M = \{a, b, c, d, e, f\}$, 决策属性集为 $N = \{g, h, i\}$ 。

表 1 决策形式背景
Tab.1 Formal decision context

G	a	b	c	d	e	f	g	h	i
1	+	-	-	-	+	-	+	+	-
2	-	+	+	+	+	+	-	+	+
3	-	-	-	+	+	+	-	+	-
4	+	-	-	-	-	+	+	-	-

背景 (G, M, I) 共有 13 个对象导出三支概念, 分别标为 $TC_i (i = 1, 2, \dots, 13)$, 其对象导出三支概念格 $OEL(G, M, I)$ 如图 1 所示; 背景 (G, N, J) 共有 10 个对象导出三支概念, 其对象导出三支概念格 $OEL(G, N, J)$ 如图 2 所示。

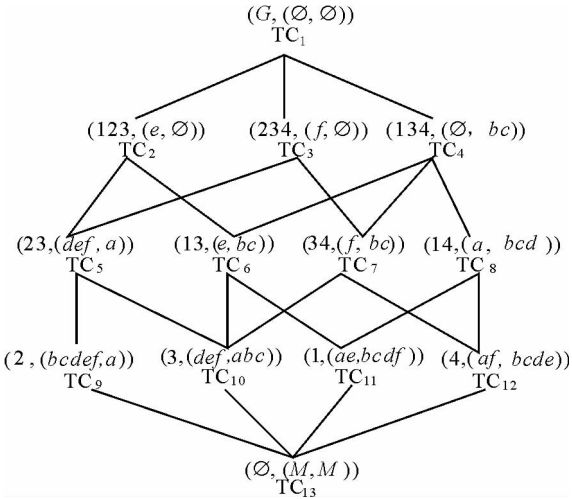


图 1 $OEL(G, M, I)$
Fig.1 $OEL(G, M, I)$

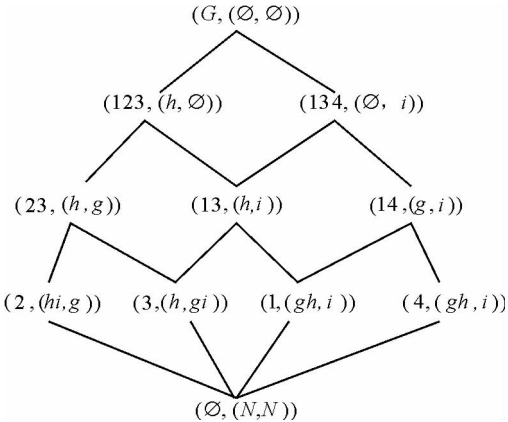


图 2 $OEL(G, N, J)$
Fig.2 $OEL(G, N, J)$

容易判断, $OEL(G, M, I) \leq OEL(G, N, J)$, 所以该决策形式背景是 OE- 协调的。它的 OE- 约简共有 4 个, 分别是 $D_1 = \{a, b, e\}$, $D_2 = \{a, c, e\}$, $D_3 = \{b, d, e\}$, $D_4 = \{c, d, e\}$ 。其中 OE- 核心属性为 e , OE- 相对必要属性为 a, b, c, d , 绝对不必要属性为 f 。

由例 1 可知 OE- 协调的决策形式背景的 OE- 约简未必是唯一的。

利用上述定义和定理, 得到以下推论。

推论 1 OE- 核心是 OE- 约简 $\Leftrightarrow$ OE- 约简唯一。

证明 $\Rightarrow$ 。(反证法) 假设若 OE- 核心是 OE- 约简, 则 OE- 约简不唯一。不妨设 D_j, D_k 均为 OE- 约简, 且 $D_j \neq D_k$ 。那么 OE- 核心 $\bigcap_{i \in \tau} D_i \subseteq D_j \cap D_k \subset D_j$, 由于 D_j 是 OE- 约简, 而 $\bigcap_{i \in \tau} D_i \subset D_j$, 即 $\bigcap_{i \in \tau} D_i$ 是 D_j 的真子集, 所以 OE- 核心 $\bigcap_{i \in \tau} D_i$ 不可能是 OE- 约简, 与已知条件矛盾, 故假设不成立。因此, 如果 OE- 核心是 OE- 约简, 则 OE- 约简唯一。

$\Leftarrow$ 。显然成立。

推论 2 $m \in M$ 是 OE- 不必要属性 $\Leftrightarrow M - \{m\}$ 是 OE- 协调集。

推论 3 $m \in M$ 是 OE- 核心属性 $\Leftrightarrow M - \{m\}$ 不是 OE- 协调集。

2.2 OE-协调集判定定理

因为决策形式背景上的 OE- 约简 D 满足以下两个条件: 首先, D 是 OE- 协调集; 其次, 对于任意的 $d \in D, D - \{d\}$ 不是 OE- 协调集。即 OE- 约简的本质就是极小 OE- 协调集。因此, 只要对 OE- 协调集的充要条件研究透彻, 就能获得 OE- 约简的判定方法。下面给出 OE- 协调集的几个充要条件, 即 OE- 协调集判定定理。

定理 2 (OE- 协调集判定定理 1) 设 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调决策形式背景, $D \subseteq M, D \neq \emptyset$, 则 D 是 OE- 协调集的充要条件是

$$\forall A, B \subseteq N, (A, B) \neq (\emptyset, \emptyset), ((A, B)^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ} = (A, B)^{\succ}。$$

证明 必要性。 $\forall A, B \subseteq N, (A, B) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 总有 $((A, B)^{\succ}, (A, B)^{\prec N}) \in OEL(G, N, J)$ 。而根据 D 是 OE- 协调集, 可知 $OEL(G, D, I_D) \leq OEL(G, N, J)$, 故 $\exists H, K \subseteq D, ((A, B)^{\succ}, (H, K)) \in OEL(G, D, I_D)$, 于是 $(H, K)^{\succ} = (A, B)^{\succ}$, $(H, K) = (A, B)^{\prec D} = (A, B)^{\prec M} \cap (D, D)$, 因此, $(H, K)^{\succ} = ((A, B)^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ} = (A, B)^{\succ}$ 。

充分性。要证 D 是 OE- 协调集, 即证 $\forall (X,$

$(A, B)) \in OEL(G, N, J)$, 一定有 $(X, X^{\prec D}) \in OEL(G, D, I_D)$ 。

$\forall (X, (A, B)) \in OEL(G, N, J)$, 因为 (G, M, I, N, J) 是 OE- 协调决策形式背景, 故 $OEL(G, M, I) \leq OEL(G, N, J)$, 所以 $(X, X^{\prec M}) \in OEL(G, M, I)$ 。又由 $(X, (A, B)) \in OEL(G, N, J)$, 有 $X = (A, B)^{\succ}$, 所以 $X^{\prec D} = (X^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ} = ((A, B)^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ}$, 由已知 $((A, B)^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ} = (A, B)^{\succ} = X$, 所以 $X^{\prec D} = X$, 故 $(X, X^{\prec D}) \in OEL(G, D, I_D)$ 。因此, D 是 OE- 协调集。

定理 3 (OE- 协调集判定定理 2) 设 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调决策形式背景, $D \subseteq M, D \neq \emptyset$, 则 D 是 OE- 协调集的充要条件是

$$\forall A, B \subseteq N, (A, B) \neq (\emptyset, \emptyset), \exists H, K \subseteq D, (H, K) \neq (\emptyset, \emptyset), (H, K)^{\succ} = (A, B)^{\succ}。$$

证明 必要性。由定理 2 必要性的证明可得。

充分性。由 $(H, K)^{\succ} = (A, B)^{\succ}$ 可得 $(H, K) \subseteq (H, K)^{\prec D} \subseteq (H, K)^{\prec M} = (A, B)^{\prec M}$, 且 $H, K \subseteq D$, 因而 $(H, K) \subseteq (A, B)^{\prec M} \cap (D, D)$, $((A, B)^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ} \subseteq (H, K)^{\succ} = (A, B)^{\succ}$ 。又因为 $((A, B)^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ} \supseteq (A, B)^{\prec M} \cup (D, D)^{\succ} \supseteq (A, B)^{\prec M} \supseteq (A, B)^{\succ}$, 从而有 $((A, B)^{\prec M} \cap (D, D))^{\succ} = (A, B)^{\succ}$, 根据定理 2, D 是 OE- 协调集。

定理 4 (OE- 协调集判定定理 3) 设 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调决策形式背景, $D \subseteq M, D \neq \emptyset$, 则 D 是 OE- 协调集的充要条件是

$$\forall a, b \in N, \exists H, K \subseteq D, (H, K) \neq (\emptyset, \emptyset), (H, K)^{\succ} = (a, b)^{\succ}。$$

证明 必要性。由定理 3 可证。

充分性。 $\forall A, B \subseteq N$ 且 $A, B \neq \emptyset$, 记 $A = \{a_t \mid t \in \tau\}, B = \{b_l \mid l \in \lambda\}$ (τ, λ 为指标集)。已知 $\forall (a_t, b_l) \in (A, B) \subseteq (N, N), \exists (H_t, K_l) \subseteq (D, D), (H_t, K_l) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 满足 $(H_t, K_l)^{\succ} = (a_t, b_l)^{\succ}$ 。于是

$$(A, B)^{\succ} = (\bigcup_{t \in \tau, l \in \lambda} (a_t, b_l))^{\succ} = \bigcap_{t \in \tau, l \in \lambda} (a_t, b_l)^{\succ} = \bigcap_{t \in \tau, l \in \lambda} (H_t, K_l)^{\succ} = (\bigcup_{t \in \tau, l \in \lambda} (H_t, K_l))^{\succ}。$$

记 $(H, K) = \bigcup_{t \in \tau, l \in \lambda} (H_t, K_l)$, 则 $(H, K) \subseteq (D, D), (H, K) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 满足 $(H, K)^{\succ} = (A, B)^{\succ}$, 因此, 根据定理 3, D 是 OE- 协调集。

定理 5 (OE- 协调集判定定理 4) 设 $(G, M,$

$I, N, J)$ 为 OE- 协调决策形式背景, $D \subseteq M, D \neq \emptyset$, 则 D 是 OE- 协调集的充要条件是

$$\forall a, b \in N, ((a, b)^{\triangleright \leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} = (a, b)^{\triangleright}.$$

证明 必要性.由定理 2 可证。

充分性.已知 $\forall a, b \in N$, 有 $((a, b)^{\triangleright \leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} = (a, b)^{\triangleright}$. 记 $(H, K) = (a, b)^{\triangleright \leq M} \cap (D, D)$, 则有 $(H, K) \subseteq (D, D), (H, K) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 且 $(H, K)^{\triangleright} = (a, b)^{\triangleright}$, 因此, 根据定理 4, D 是 OE- 协调集。

上面给出了 4 个关于决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的 OE- 协调集等价命题(定理 2 ~ 5), 均可作为一个条件属性子集 D 是否为决策背景的 OE- 协调集的判定方法。但是对于具体决策形式背景而言, 定理 2、3 的理论意义更强, 定理 4、5 的可操作性更强。由于只考虑决策属性集 $N \times N$ 中的元素, 因此, 实际判断时多选用定理 5。

由定理 5 及 OE- 约简的定义易得 OE- 约简的判定方法。

定理 6 (OE- 约简判定定理) 设 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调决策形式背景, $D \subseteq M, D \neq \emptyset$, 则 D 是 OE- 约简的充要条件是

$$\forall a, b \in N, ((a, b)^{\triangleright \leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} = (a, b)^{\triangleright}, \text{ 且 } \forall a, b \in N, \forall d \in D, ((a, b)^{\triangleright \leq M} \cap (D - \{d\}, D - \{d\}))^{\triangleright} \neq (a, b)^{\triangleright}.$$

例 2 (续例 1) 针对表 1 所示的决策形式背景 (G, M, I, N, J) , 下面根据定理 5 对任意选取的条件属性子集是否为 OE- 协调集进行判断, 若条件属性子集为 OE- 协调集, 进一步利用定理 6 判断其是否为 OE- 约简。

$$\begin{aligned} \text{设 } D &= \{a, b, e, f\}, \text{ 已知 } N = \{g, h, i\}, \text{ 由于} \\ (g, h)^{\triangleright \leq M} &= \{4\}^{\leq M} = (af, bcde), \\ ((af, bcde) \cap (D, D))^{\triangleright} &= (af, be)^{\triangleright} = \\ &\{4\} = (g, h)^{\triangleright}, \\ (g, i)^{\triangleright \leq M} &= \{1, 4\}^{\leq M} = (a, bcd), \\ ((a, bcd) \cap (D, D))^{\triangleright} &= (a, b)^{\triangleright} = \\ &\{1, 4\} = (g, i)^{\triangleright}, \\ (h, i)^{\triangleright \leq M} &= \{1, 3\}^{\leq M} = (e, bcd), \\ ((e, bcd) \cap (D, D))^{\triangleright} &= (e, b)^{\triangleright} = \\ &\{1, 3\} = (h, i)^{\triangleright}. \end{aligned}$$

其中, D 满足定理 5, 所以 D 是 OE- 协调集。进一步, $D_1 = D - \{f\} = \{a, b, e\}$ 也是 OE- 协调集, 所以 D 不是 OE- 约简。而 D_1 的所有真子集 $\{a, b\}, \{a, e\}, \{b, e\}$ 均不是 OE- 协调集, 所以 D_1 是 OE- 约简。同理, 可判定 $D_2 = \{a, c, e\}, D_3 = \{b,$

$d, e\}, D_4 = \{c, d, e\}$ 均为 OE- 约简, 与例 1 所得结果一致。

设 $E = \{a, b, c\}$, 由于 $((g, i)^{\triangleright \leq M} \cap (E, E))^{\triangleright} = (a, bc)^{\triangleright} = \{4\} \neq (g, i)^{\triangleright} = \{1, 4\}$, 不满足定理 5, 所以 $E = \{a, b, c\}$ 不是 OE- 协调集。事实上, 由例 1, 核心属性 $e \notin E$, 所以 E 一定不是 OE- 协调集。

定理 7 (OE- 协调集判定定理 5) 设 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调的决策形式背景, 则 D 是 OE- 协调集的充要条件是

$$\forall X \in OEL_E(G, N, J), (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} \subseteq (X^{\leq M} \cap (M - D, M - D))^{\triangleright}.$$

证明 由于 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调决策形式背景, 故 $OEL(G, M, I) \leq OEL(G, N, J)$, 所以 $OEL_E(G, N, J) \subseteq OEL_E(G, M, I)$ 。

必要性.若 D 是 OE- 协调集, 则 $OEL_E(G, N, J) \subseteq OEL_E(G, D, I_D)$ 。于是, 对于任意 $X \in OEL_E(G, N, J)$, 有 $X \in OEL_E(G, M, I)$ 且 $X \in OEL_E(G, D, I_D)$, 故有 $X = X^{\leq M} = X^{\leq D} = (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright}$ 。同时,

$$\begin{aligned} X^{\leq M} &= \\ (X^{\leq M} \cap (M, M))^{\triangleright} &= \\ (X^{\leq M} \cap ((D, D) \cup (M - D, M - D)))^{\triangleright} &= \\ ((X^{\leq M} \cap (D, D)) \cup \\ (X^{\leq M} \cap (M - D, M - D)))^{\triangleright} &= \\ (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} \cap \\ (X^{\leq M} \cap (M - D, M - D))^{\triangleright}, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} &= \\ (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} \cap \\ (X^{\leq M} \cap (M - D, M - D))^{\triangleright}. \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned} (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} &\subseteq \\ (X^{\leq M} \cap (M - D, M - D))^{\triangleright}. \end{aligned}$$

充分性.若 $\forall X \in OEL_E(G, N, J), (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} \subseteq (X^{\leq M} \cap (M - D, M - D))^{\triangleright}$ 成立, 可得 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright} = X^{\leq M}$, 由于 $X \in OEL_E(G, M, I)$, 则 $X^{\leq M} = X$, 于是 $X = (X^{\leq M} \cap (D, D))^{\triangleright}$, 即 $(X, (X^{\leq M} \cap (D, D))) \in OEL(G, D, I_D)$, 所以 D 是 OE- 协调集。

2.3 约简方法

下面介绍差别矩阵和差别函数的定义, 通过差别矩阵和差别函数的方法可以得到 OE- 协调决策形式背景的 OE- 约简。

定义 7 设 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调决策形式背景, $(X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j)) \in OEL(G, M, I)$, 称

$$DIS_{OEL}((X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j))) = \begin{cases} (A_i - A_j, B_i - B_j), (X_i, X_i^{\leq N}) \in OEL(G, N, J) \\ \quad \text{且 } (X_i, (A_i, B_i)) < (X_j, (A_j, B_j)); \\ (\emptyset, \emptyset), \text{其他。} \end{cases}$$

为 $(X_i, (A_i, B_i))$ 与 $(X_j, (A_j, B_j))$ 的 OE- 差别属性集。称

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{OEL} = & (DIS_{OEL}((X_i, (A_i, B_i)), \\ & (X_j, (A_j, B_j))), (X_i, (A_i, B_i)), \\ & (X_j, (A_j, B_j)) \in OEL(G, M, I) \end{aligned}$$

为该 OE- 协调决策形式背景的 OE- 差别矩阵。

例 3 (续例 1) 根据定义 7, 表 2 给出了例 1 中决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的 OE- 差别矩阵 $\mathbf{A}_{OEL}$ 。其中, 矩阵第 i 行第 j 列代表的是 OE- 条件概念 TC_i 与 TC_j 的差别属性集 $DIS_{OEL}(TC_i, TC_j)$ 。

表 2 例 1 中决策形式背景的 OE-差别矩阵
Tab. 2 OE-discernibility matrix of formal decision context in example 1

	TC ₁	TC ₂	TC ₃	TC ₄	TC ₅	TC ₆	TC ₇	TC ₈	TC ₉	TC ₁₀	TC ₁₁	TC ₁₂	TC ₁₃
TC ₁	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₂	($e, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₃	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₄	($\emptyset, bc$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₅	($\emptyset, \emptyset$)	(df, a)	(de, a)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₆	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, bc$)	($\emptyset, \emptyset$)	($e, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₇	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₈	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	(a, d)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₉	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($bc, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₁₀	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, bc$)	(df, a)	(de, a)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₁₁	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	(a, df)	($\emptyset, \emptyset$)	(e, f)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₁₂	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	(a, de)	(f, e)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)
TC ₁₃	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($\emptyset, \emptyset$)	($a, bcdef$)	(abc, def)	($bcd\bar{f}, ae$)	($bcde, af$)	($\emptyset, \emptyset$)

引理 1 设 (G, M, I) 为形式背景, $(X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j)), (X_k, (A_k, B_k)) \in OEL(G, M, I), (X_i, (A_i, B_i)) < (X_j, (A_j, B_j)), (X_j, (A_j, B_j)) \leq (X_k, (A_k, B_k)), D \subseteq M$, 如果 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \neq (A_j, B_j) \cap (D, D)$, 那么 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \neq (A_k, B_k) \cap (D, D)$ 。

证明 由于 $(X_i, (A_i, B_i)) < (X_j, (A_j, B_j))$, 所以 $(A_i, B_i) \supset (A_j, B_j)$, 故 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \supseteq (A_j, B_j) \cap (D, D)$ 。又 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \neq (A_j, B_j) \cap (D, D)$, 因而 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \supset (A_j, B_j) \cap (D, D)$ 。另外, 由 $(X_j, (A_j, B_j)) \leq (X_k, (A_k, B_k))$, 可得 $(A_j, B_j) \supseteq (A_i, B_i)$, 从而 $(A_j, B_j) \cap (D, D) \supseteq (A_k, B_k) \cap (D, D)$, 因此 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \supset (A_k, B_k) \cap (D, D)$, 于是 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \neq (A_k, B_k) \cap (D, D)$ 。

定理 8 (OE- 协调集判定定理 6) 设 (G, M, I, N, J) 为 OE- 协调决策形式背景, $D \subseteq M, D \neq \emptyset$, 下列命题等价。

- i) D 是 OE- 协调集。
- ii) 任意 $(X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j)) \in$

$OEL(G, M, I)$, 若 $(X_i, X_i^{\leq N}) \in OEL(G, N, J)$ 且 $(X_i, (A_i, B_i)) < (X_j, (A_j, B_j))$, 则 $(A_i, B_i) \cap (D, D) \neq (A_j, B_j) \cap (D, D)$ 。

iii) 任意 $(Y_m, (C_m, E_m)), (Y_n, (C_n, E_n)) \in OEL(G, M, I)$, 若 $DIS_{OEL}((Y_m, (C_m, E_m)), (Y_n, (C_n, E_n))) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 则 $(D, D) \cap DIS_{OEL}((Y_m, (C_m, E_m)), (Y_n, (C_n, E_n))) \neq (\emptyset, \emptyset)$ 。

iv) 任意 $A, B \subseteq M$, 若 $(A, B) \cap (D, D) = (\emptyset, \emptyset)$, 则 $(A, B) \notin \mathbf{A}_{OEL}$ 。

证明 i) $\Rightarrow$ ii)。因为 D 是 OE- 协调集, 所以 $OEL(G, D, I_D) \leq OEL(G, N, J)$ 。 $\forall (X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j)) \in OEL(G, M, I)$, 若 $(X_i, X_i^{\leq N}) \in OEL(G, N, J)$, 则 $\exists C_i, E_i \subseteq D, (X_i, (C_i, E_i)) \in OEL(G, D, I_D), (C_i, E_i) = X_i^{\leq D} = X_i^{\leq M} \cap (D, D) = (A_i, B_i) \cap (D, D)$ 。又因为 $(X_i, (A_i, B_i)) < (X_j, (A_j, B_j))$, 所以 $X_i \subset X_j$ 。再由 $(A_j, B_j) \supseteq ((A_j, B_j) \cap (D, D))$, 可得 $X_j = (A_j, B_j)^{\triangleright} \subseteq ((A_j, B_j) \cap (D, D))^{\triangleright}$, 于是 $X_i \subset ((A_j, B_j) \cap (D, D))^{\triangleright}$, 从而可得 $((A_i, B_i) \cap (D, D))^{\triangleright} =$

$(C_i, E_i)^> = X_i \neq ((A_j, B_j) \cap (D, D))^>$ 。因此, $(A_i, B_i) \cap (D, D) \neq (A_j, B_j) \cap (D, D)$ 。

ii) $\Rightarrow$ i)。 $\forall (X, (A, B)) \in OEL(G, N, J)$, 因为 $OEL(G, M, I) \leq OEL(G, N, J)$, 所以 $(X, X^{\leq M}) \in OEL(G, M, I)$ 。若能证明 $(X, X^{\leq D}) = (X, X^{\leq M} \cap (D, D)) \in OEL(G, D, I_D)$ 也成立, 则 $OEL(G, D, I_D) \leq OEL(G, N, J)$, D 是 OE-协调集。即证 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^> = X$ 。

(反证法) 假设 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^> \neq X$ 。

一方面, 由于 $(X, X^{\leq M}), ((X^{\leq M} \cap (D, D))^> , (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M}) \in OEL(G, M, I)$, 从而 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \neq X^{\leq M}$ 。又由 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \subseteq X^{\leq M} \cap (D, D) = X^{\leq M}$, 于是 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \subset X^{\leq M}$, 因此, 必存在 $(Y, (C, E)) \in OEL(G, M, I)$, 使得 $(X, X^{\leq M}) < (Y, (C, E))$, 且 $(Y, (C, E)) \leq ((X^{\leq M} \cap (D, D))^> , (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M})$ 。由 ii) 有 $X^{\leq M} \cap (D, D) \neq (C, E) \cap (D, D)$ 。再根据引理 1, 应有 $X^{\leq M} \cap (D, D) \neq (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \cap (D, D)$ 。

另一方面, 由 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \subset X^{\leq M}$, 所以 $(X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \cap (D, D) \subseteq X^{\leq M} \cap (D, D)$, 而 $X^{\leq M} \cap (D, D) \subseteq (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M}$, 故 $X^{\leq M} \cap (D, D) = (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \cap (D, D) \subseteq (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \cap (D, D)$ 。从而 $X^{\leq M} \cap (D, D) = (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \cap (D, D)$ 。与 $X^{\leq M} \cap (D, D) \neq (X^{\leq M} \cap (D, D))^>^{\leq M} \cap (D, D)$ 矛盾, 故假设不成立。因此, $(X^{\leq M} \cap (D, D))^> = X$ 。

ii) $\Rightarrow$ iii)。 $\forall (Y_m, (C_m, E_m)), (Y_n, (C_n, E_n)) \in OEL(G, M, I)$, 若 $DIS_{OEL}((Y_m, (C_m, E_m)), (Y_n, (C_n, E_n))) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 则 $(Y_m, Y_m^{\leq N}) \in OEL(G, N, J)$ 且 $(Y_m, (C_m, E_m)) < (Y_n, (C_n, E_n))$ 。故 $(C_m, E_m) \cap (D, D) \neq (C_n, E_n) \cap (D, D)$ 。再由 $(C_m, E_m) \supset (C_n, E_n)$, 得 $(C_m, E_m) \cap (D, D) \supseteq (C_n, E_n) \cap (D, D)$ 。于是 $(C_m, E_m) \cap (D, D) \supset (C_n, E_n) \cap (D, D)$ 。因此, $(C_m - C_n, E_m - E_n) \cap (D, D) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 即 $(D, D) \cap DIS_{OEL}((Y_m, (C_m, E_m)), (Y_n, (C_n, E_n))) \neq (\emptyset, \emptyset)$ 。

iii) $\Rightarrow$ ii)。 $\forall (X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j)) \in OEL(G, M, I)$, 若 $(X_i, X_i^{\leq N}) \in OEL(G, N, J)$ 且 $(X_i, (A_i, B_i)) < (X_j, (A_j, B_j))$, 则 $DIS_{OEL}((X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j))) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 从而可得 $(D, D) \cap DIS_{OEL}((X_i, (A_i, B_i)), (X_j, (A_j, B_j))) \neq (\emptyset, \emptyset)$,

即 $(D, D) \cap (A_i - A_j, B_i - B_j) \neq (\emptyset, \emptyset)$, 因此, $(A_i, B_i) \cap (D, D) \neq (A_j, B_j) \cap (D, D)$ 。

iii) $\Leftrightarrow$ iv)。显然成立。

为叙述方便, 将 OE-差别矩阵中的元素稍作变换, 若 $DIS_{OEL}((X, (A, B)), (Y, (C, D))) = (E, F)$, 则重新记 $DIS_{OEL}((X, (A, B)), (Y, (C, D)))$ 为 $H = E \cup F$, 依然用 A_{OEL} 来表示决策背景 (G, M, I, N, J) 的 OE-差别矩阵。

定理 8 表明, OE-协调的决策形式背景的协调集与差别矩阵的每个元素相交都非空, 而约简就是找满足这些条件的协调集中的极小集合。

定义 8 设 (G, M, I, N, J) 为 OE-协调决策形式背景, 则其 OE-差别函数为

$$f(A_{OEL}) = \bigwedge_{H \in OEL} (\bigvee_{h \in H} h)$$

根据 $\wedge, \vee$ 的运算律, 差别函数 f 可以变换为最小析取范式, 这个最小范式的所有合取式就是 OE-协调的决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的全部 OE-约简。

例 4 (续例 1) 求例 1 中决策形式背景 (G, M, I, N, J) 的 OE-差别函数。

$$\begin{aligned} f(A_{OEL}) = & e \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee d \vee f) \wedge \\ & (a \vee d \vee e) \wedge (a \vee d) \wedge (e \wedge f) \wedge \\ & (a \vee b \vee c \vee d \vee e \vee f) = \\ & e \wedge (b \vee c) \wedge (a \vee d) = \\ & (a \wedge b \wedge e) \vee (a \wedge c \wedge e) \vee \\ & (b \wedge d \wedge e) \vee (c \wedge d \wedge e)。 \end{aligned}$$

决策形式背景 (G, M, I, N, J) 共有 4 个约简, 分别是 $D_1 = \{a, b, e\}, D_2 = \{a, c, e\}, D_3 = \{b, d, e\}, D_4 = \{c, d, e\}$, 与例 1 所得结果相同。

3 结语

本文基于对象导出三支概念格, 在 OE-协调的决策形式背景下, 首先定义了 OE-协调集和 OE-约简; 其次, 给出了 OE-协调集的几个判定定理和 OE-约简的判定定理; 最后, 给出了利用差别矩阵和差别函数求 OE-约简的计算方法。对于 OE-协调的决策形式背景, OE-约简也是保持 OE-非冗余规则信息不丢失的约简, 所以本文提出的 OE-协调集的判定定理也是保持 OE-非冗余规则信息不丢失的协调集判定定理, 丰富了三支概念分析的内容。

研究决策形式背景的属性约简理论是十分有

意义的,在约简后的决策背景上进行知识的更新与获取,既能保证知识的完整性,也更加精炼。本文是从对象导出三支概念格出发,研究了决策形式背景保持 OE-协调性的属性约简问题,下一步还可从属性导出三支概念格出发来研究决策属性背景的保持 AE-协调性的约简问题。

参考文献

- [1] WILLE R. Restructuring lattice theory: An approach based on hierarchies of concepts [C]//RIVAL I. Ordered Sets. Dordrecht-Boston: Reidel, 1982: 445-470.
- [2] GANTER B, WILLE R. Formal concept analysis: Mathematical foundations [M]. Berlin: Springer-Verlag, 1999.
- [3] ZHI H L, QI J J, QIAN T, et al. Conflict analysis under one-vote veto based on approximate three-way concept lattice [J]. Information Sciences, 2020, 516: 316-330.
- [4] YAO Y Y. An outline of a theory of three-way decisions [C]//Rough Sets and Current Trends in Computing. Berlin: Springer, 2012: 1-17.
- [5] QI J J, WEI L, YAO Y Y. Three-way formal concept analysis [C]//Rough Sets and Knowledge Technology. Cham: Springer, 2014: 732-741.
- [6] QI J J, QIAN T, WEI L. The connections between three-way and classical concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 91: 143-151.
- [7] REN R S, WEI L. The attribute reductions of three-way concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2016, 99: 92-102.
- [8] YU H Y, LI Q G, CAI M J. Characteristics of three-way concept lattices and three-way rough concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2018, 146: 181-189.
- [9] ZHI H L, QI J J, QIAN T, et al. Three-way dual concept analysis [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2019, 114: 151-165.
- [10] YANG S C, LU Y N, JIA X Y, et al. Constructing three-way concept lattice based on the composite of classical lattices [J]. International Journal of Approximate Reasoning, 2020, 121: 174-186.
- [11] ZHAO X R, MIAO D Q, HU B Q. On relationship between three-way concept lattices [J]. Information Sciences, 2020, 538: 396-414.
- [12] 魏玲. 粗糙集与概念格的约简理论与方法 [D]. 西安: 西安交通大学, 2005.
- [13] WEI L, QI J J, ZHANG W X. Attribute reduction theory of concept lattice based on decision formal contexts [J]. Science in China Series F: Information Sciences, 2008, 51(7): 910-923.
- [14] LI J H, MEI C L, LYU Y J. Knowledge reduction in decision formal contexts [J]. Knowledge-Based Systems, 2011, 24(5): 709-715.
- [15] LI J H, MEI C L, WANG J H, et al. Rule-preserved object compression in formal decision contexts using concept lattices [J]. Knowledge-Based Systems, 2014, 71: 435-445.
- [16] CHEN J K, MI J S, XIE B, et al. Attribute reduction in formal decision contexts and its application to finite topological spaces [J]. International Journal of Machine Learning and Cybernetics, 2021, 12: 39-52.
- [17] 陈雪, 魏玲, 钱婷. 基于 AE-概念格的决策形式背景属性约简 [J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(12): 95-103.
CHEN X, WEI L, QIAN T. Attribute reduction in formal decision contexts based on AE-concept lattices [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2017, 52(12): 95-103.
- [18] 林洪, 秦克云. 决策形式背景三支粒约简 [J]. 计算机科学, 2018, 45(10): 47-50.
LIN H, QIN K Y. Three-way granular reduction for decision formal context [J]. Computer Science, 2018, 45(10): 47-50.
- [19] 刘琳, 钱婷, 魏玲. 基于属性导出三支概念格的决策背景规则提取 [J]. 西北大学学报(自然科学版), 2016, 46(4): 481-487.
LIU L, QIAN T, WEI L. Rules extraction in formal decision contexts based on attribute-induced three-way concept lattices [J]. Journal of Northwest University (Natural Science Edition), 2016, 46(4): 481-487.
- [20] 刘琳, 魏玲, 钱婷. 决策形式背景中具有置信度的三支规则提取 [J]. 山东大学学报(理学版), 2017, 52(2): 101-110.
LIU L, WEI L, QIAN T. Three-way rules extraction in formal decision contexts with confidence [J]. Journal of Shandong University (Natural Science), 2017, 52(2): 101-110.
- [21] WEI L, LIU L, QI J J, et al. Rules acquisition of formal decision contexts based on three-way concept lattices [J]. Information Sciences, 2020, 516: 529-544.
- [22] LONG B H, XU W H, ZHANG X Y. Double threshold construction method for attribute-induced three-way concept lattice in incomplete fuzzy formal context [J]. The Journal of Engineering, 2020(13): 549-554.

(编辑 张欢)